

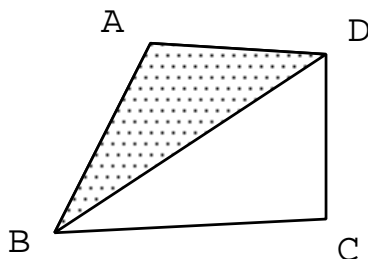
# 大學申請入學考試

## 一. 填充題：每題六分

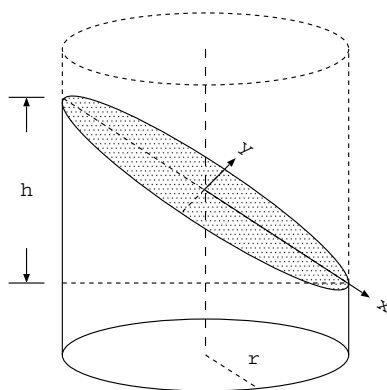
- (1) 若  $n = 9^{(8^7)}$ ，則  $n$  的個位數為何？
- (2) 將長為  $a$  的線段任意分成三段，則分割後的三線段可構成一個三角形的機率為何？
- (3) 某三位數數字，此三位數的數字和為 8，如果把這個數倒過來寫，所得的新數比原數大 4 倍又 21。若原數與新數之和為 646，則原數為何？
- (4) 將 12 本相同的書分給甲，乙，丙三人，甲至少 1 本，乙至少 2 本，丙至少 3 本，請問有多少種不同的分法？
- (5) 狗年正月初一為陽曆的 2006 年 1 月 29 日，若以中國傳統干支表示則為戊午日，明年豬年的正月初一為 2007 年 2 月 18 日，請問日的干支為何？

註：中國傳統的年，月，日都各以 60 干支循環使用，分別由 10 個天干（甲，乙，丙，丁，戊，己，庚，辛，壬，癸）與 12 個地支（子，丑，寅，卯，辰，巳，午，未，申，酉，戌，亥）各取一個依次循環，順序為甲子，乙丑，丙寅，...，癸酉，甲戌，乙亥，...，癸亥 等等，例如：2006 年 1 月 29 日為戊午日，則 1 月 30 日為己未日，1 月 31 日為庚申日，依此類推。

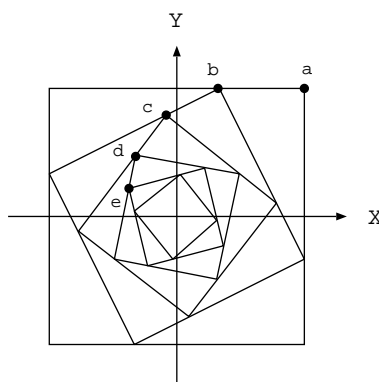
- (6) 四邊形  $ABCD$  中， $\vec{AC} = \frac{1}{3}(2\vec{AB} + 4\vec{AD})$ ，已知三角形  $ABC$  面積為 4，則三角形  $ABD$  面積為何？



- (7) 一個半徑為  $r$  的圓柱體，將此圓柱體斜切如下圖，請推導斜切面的曲線方程式為何？



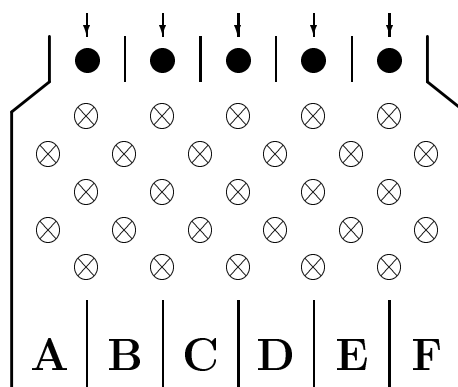
- (8) 有一邊長為 2 的正方形，若將正方形的每個頂點延著邊長以逆時鐘方向移動  $\frac{1}{3}$  邊長距離到新位置上，則新頂點連在一起也成一正方形，如此步驟一直下去，可產生以下縮小的旋轉正方形，



若點  $a$  為起始正方形的頂點，座標為  $(1,1)$ ，經過旋轉四次後  $a$  點移動到  $e$  點，請問  $e$  點座標為何？

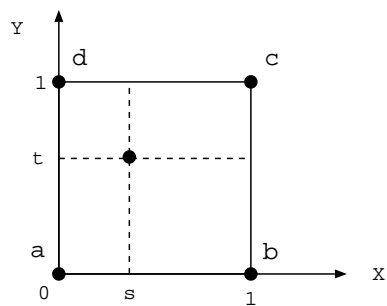
## 二. 演算題：每題十分，最後一題十二分

- (1) 假設有一 5 層滾輪的彈珠臺外形如下圖：



彈珠可隨機地由頂端的任一個位置滾下來，且一定會撞到最頂層的滾輪，撞到滾輪後的彈珠會等機會地往左或往右下滾。此外若彈珠撞到偶數層的最左右兩側滾輪，且經過碰撞後，彈珠滾向兩側牆壁，則彈珠最後的位置就是左右兩側的位置，請計算彈珠出現在各個位置的機率？

- (2) 甲，乙兩人連續擲一枚公正的硬幣，二人約定若每次出現正面時，乙給甲一元，出現反面時，甲給乙一元。今甲有  $a$  元，乙有  $b$  元，請問甲將乙的錢全都贏來的機率為何？反之乙將甲的錢全都贏來的機率為何？
- (3) 令  $P$  為正質數， $n$  為自然數， $k$  為介於  $[0, n]$  的整數，求不大於  $P^k$  且與其互質的正整數個數有多少個？
- (4) 氣象局在  $[0, 1] \times [0, 1]$  區域內量測到四個頂點的溫度，分別為  $a, b, c$  與  $d$ ，此四個溫度互不相等。假設在此區域內的任一水平線與垂直線的溫度變化皆呈現直線變化，若氣象局要在此區域內繪畫出等溫線圖形，請推導出等溫線為直線的條件為  $a + c = b + d$ 。



- (5) 若  $a$ ， $b$  與  $c$  為自然數且滿足  $a^2 + b^2 = c^2$ ，請證明三數乘積為 30 的倍數。