數學之訓練與釋例

林强

在數學發展史上，數學問題的發現與尋求解決之道一直佔著極重要的角色；因此數學的訓練，亦應著重如何發掘問題與如何解決問題。當學生在課堂聽過課或看過書後，他就應該去做書本上的習題，這樣才能了解教材的內容和用途，也唯有如此，才能思考出一些屬於自己的東西。下面列出一些學數學的人必備的一些訓練。

一、猜測、證明或舉反例

一個人如果把特殊的例子當成一般的通則，當然是錯誤的；但從事數學研究的人，應能夠從一個或數個特例來猜一般的通則，對這猜測應證明其成立或舉一例子說明其不成立，否則就是一個未解決的問題。

我們把一個敍述寫成"若P，則Q"之型式，如果能舉一個P成立而Q不成立的例子，我們就能說原敍述是錯的；而那個例子，就稱爲一個反例。比方說：對"若X爲質數，則X爲奇數"這個敍述，$X=2$就是一個反例，因2的確是質數，但2不是奇數。

有時，我們可以先設敍述成立，然後推出矛盾的現象，這樣也能說明敍述不成立。比方說：有"質數只有有限多個"這樣的敍述。我們先設其成立，而令包含所有質數的集合爲$\{P_1, P_2, \cdots, P_m\}$，另外令$M = P_1 \cdot P_2 \cdots P_m + 1$，我們發現$M$無法被$P_1$，$P_2$ …或P_m 之任一質數除盡，這是不可能的現象，因任一大于1的數，都可寫成質數的乘積。上面的論述，說明了"質數只有有限多個"是錯的。

二、改變敍述內的條件

1.逆敍述能否成立，我們稱"若Q，則P"爲"若P，則Q"之逆敍述。當一個敍述成立時，我們很自然會想到其逆敍述是否成立。

例：我們知道"若f爲可微分函數，則f爲連續函數"是對的。但其逆敍述"若f爲連續函數，則f爲可微分函數"是不成立的，因爲$f(x)=|x|$就是一個反例。

2.一個敍述已知其不成立，我們試著加強假設條件，或減弱結論條件，看能否使之成立。

例：我們知道

①“ $f(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a,b]$, $\int_a^b f=0$

則 $f(x)=0$, $\forall x\in[a,b]$ ”不成立。

②“ $f(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a,b]$, $\int_a^b f=0$

f 爲連續函數，則 $f(x)=0$, $\forall x\in[a,b]$ ”成立。

③“ $f(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a,b]$, $\int_a^b f=0$

則 f 在 $[a,b]$ 上幾乎處處爲 0 ”，成立。（註 1 ）

上面①有個不成立的敘述，②把①中的假設增強了，而③把①中的結論減弱了。

練習：“ $f:[a,b]\to R$, $f_n:[a,b]\to R$

f_n 爲連續函數， $n=1,2,\cdots$

f_n 收斂至 f ，則 f 爲連續函數”

問：①上面的敘述是否成立？若不成立，②試加強假設條件，使之成立，③減弱結論條件，使之成立。（註 2 ）

3．一個敘述已知其成立，我們試著減弱假設之條件或加強結論之條件，看是否仍能成立。

練習：已知“ $f:R\to R$, f 爲連續函數，

$f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in R$

則 $f(x)=Cx$ ”成立。

問：上面敘述去掉“ f 爲連續函數”這個條件，是否仍然成立？（註 3 ）

三、以簡御繁

1．記憶公式或定理時，把相關的記在一起；那個是基本的，那些是從基本的再推出來的，推的方法也要會，這樣存在你腦中的東西，才乾淨俐落，無雜亂之感。

2．解複雜的問題，我們可以先解決較簡單的情況（或特例），經驗告訴我們，特例的解決往往對整個問題相當有幫助。看看下面幾個有名的定理。

①（Rolle 定理） $f:[a,b]\to R$, f 在 $]a,b[$ 上可微分，在 a , b 連續，且 $f(a)=f(b)$ ，則存在 c , $a<c<b$ ，使得 $f'(c)=0$

②（ $M.V.T$ ） $f:[a,b]\to R$, f 在 $]a,b[$ 上可微分，在 a , b 連續，則存在 c , $a<c<b$ ，使得 $f'(c)\cdot(b-a)=f(b)-f(a)$

③（ Bernstein 逼近定理） $f:[0,1]\to R$, f 爲連續函數，若給一 $\varepsilon>0$ ，則存在一多項式函數 $P(x)$ 使得 $|P(x)-f(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in[0,1]$

④（ Weierstrass 定理） $f:[a,b]\to R$, f 爲連續函數，若給一 $\varepsilon>0$ ，則存在一多項式函數 $P(x)$ 使得 $|P(x)-f(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in[a,b]$

很明顯地，上述定理中，①是②之特例，③是④之特例；而我們證明時，都是先證了特例，才利用特例來證一般的情況。

練習：

①湖上有兩船，其中之一以定速度 V_1 前進，另一船靜止不動，應如何求出兩船之最近距離。

②湖上兩船分別以定速度 V_1 , V_2 前進，應如何求出兩船之最近距離。（註 4 ）

四、把已有的結果一般化

有時，我們熟知一些事實，而且感到這些事實都在表達某一種觀念；這時，就可嘗試去求更一般性的定理，使得我們原先知道的事實只是這定理的一些小結果。

例：學過中學數學的人對“已知三角形三邊長，求中線長”應不陌生，甚至，會求分角線之長度；不論中線或分角線都是“從頂點到對邊某點的線段”，關於這種線段之長度，我們有個一般性的定理如下：

定理：有三角形 ABC，X 爲 $\overline{BC}$ 上之一點，令 $BX=m$，$CX=n$，$AX=P$，

則，$P^2=\dfrac{b^2m+c^2n}{a}-mn$

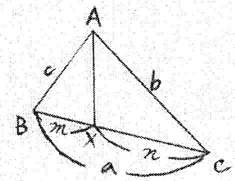
證明：令 $\angle AXB=\alpha$，$\angle AXC=\beta$，

則 $c^2=m^2+p^2-2mp\cos\alpha$（餘弦定理）

$b^2=n^2+p^2-2np\ \cos\beta$

而 $\cos\alpha=-\cos\beta$

從上面三式，可證得 $p^2=\dfrac{b^2m+c^2n}{a}-mn$



圖一

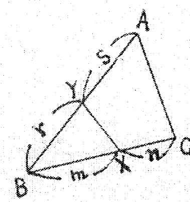
練習：

①把上述定理特殊化，可得三角形中線與分角線長之公式。$\triangle ABC$ 中，從頂點 A 到對邊中點之線段長爲 ＿＿＿＿（以邊長 a，b，c 表之）；角 A 之分角線長爲 ＿＿＿＿。

②把上述定理一般化，而得：

$\triangle ABC$，如圖二，

則 XY 之長度爲 ＿＿＿＿（用 a，b，c 及 m，n，r，s 表之）（註5）



圖二

五、檢查結論是否合理

我們解題目得到答案後，可從不同的角度，來看答案是否合理。以上面定理爲例，我們檢查

$p^2=\dfrac{b^2m+c^2n}{a}-mn$ 合理嗎？

①從特例來看，實際情形與答案相符嗎？如：從圖形上來看，“$n=0$ 時，$p=b$”，“A 與 X 重合時，$p=0$”；用我們答案的公式來求，是否有相同之結果。又如：中線長、分角線長的公式是我們原本知道的，而用現在的公式導出來的是否一樣。

②觀察各因素的相對關係；從圖形可知 c，m 與 b，n 相對，那麼公式中之 c，b 互調，m，n 互調所得的式子，應與原式相同。

③以維度來檢定；長度乃是1維，故 b，c，m，n，a 皆1維，自然可知 b^2m 爲3維，$\dfrac{b^2m+c^2n}{a}$ 爲2維；最後發現 p^2 與 $\dfrac{b^2m+c^2n}{a}-mn$ 都是2維。

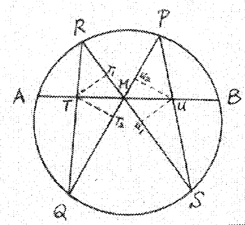
檢查答案，如果發現答案不合理，就得把求得答案的過程，重新檢討，看那一個地方有錯誤。如果發現答案合理，則可增加對答案正確性的信心。

六、技巧之摩仿

學任何東西，都是先摩仿而後創作；不要爲做不出題目，而灰心喪志。Polya 說：「你如果解不出某個問題，一定還有比這題更容易的問題你不會做。」因此，我們解題時就是要把那比這題更容易的問題找出來並解決掉然後用它來解原來的問題；如果題目解不出來，沒關係，看看人家的答案，找出那使你解不出問題的那更容易的問題是什麼，把它單獨挑出來，學習它的解法，甚至加以推廣。

先看下面的定理，然後再模仿其方法，做後面的練習。

（蝴蝶定理）一圓內，有一弦$\overline{AB}$，M為AB之中點，PQ、$\overline{RS}$為通過M之另二弦（如圖三），若$\overline{RQ}$與$\overline{PS}$分別交$\overline{AB}$于T，U，則$TM=UM$



圖三

證明：從T、U作$\overline{RS}$與$\overline{PQ}$之垂線，T_1，T_2，U_1，U_2分別為這些垂線之垂足。由相似三角形對應邊成比例的關係，而

有 $\dfrac{TM}{UM}=\dfrac{TT_1}{UU_1}$，$\dfrac{TM}{UM}=\dfrac{TT_2}{UU_2}$，$\dfrac{RT}{PU}=\dfrac{TT_1}{UU_2}$，$\dfrac{QT}{SU}=\dfrac{TT_2}{UU_1}$

$$\therefore\ \frac{(TM)^2}{(UM)^2}=\frac{TT_1}{UU_1}\cdot\frac{TT_2}{UU_2}=\frac{TT_1}{UU_2}\cdot\frac{TT_2}{UU_1}=\frac{RT}{PU}\cdot\frac{QT}{SU}=\frac{RT\cdot TQ}{PU\cdot SU}=\frac{AT\cdot TB}{AU\cdot UB}$$

$$=\frac{(AM-TM)\cdot(BM+TM)}{(AM+MU)\cdot(BM-UM)}=\frac{AM^2-TM^2}{AM^2-UM^2}$$

$$\text{故 }\frac{TM^2}{UM^2}=\frac{(AM^2-TM^2)+TM^2}{(AM^2-UM^2)+UM^2}=1$$

$\therefore\ TM=UM$，得證

練習：在圖三中，若$\overline{QS}$與$\overline{PR}$之延長線分別交$\overline{AB}$之延長線于V，W，求證：$MV=MW$

七、類推或推廣至高度空間

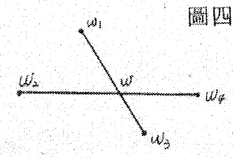
世界上的現象往往蘊含著規律性，所以往往一些大胆的類推，都可找到證明。尤其一些一度或二度空間有的結果，大部份可經適當的處理，而推廣至三度或更高度空間。

看看下面的定理，然後去推廣

定理：在平面上的四個凸集合，若任三個交集不空，則此四集合的交集亦不空。

證明：A，B，C，D為平面上的四個凸集合，且任三個交集都非空集合；設$w_1\in A\cap B\cap C$，$w_2\in A\cap B\cap D$，$w_3\in A\cap C\cap D$，$w_4\in B\cap C\cap D$。

圖四



情況1，w_1，w_2，w_3，w_4 構成一凸四邊形的頂點；如圖四，設對角線$\overline{w_1w_3}$與$\overline{w_2w_4}$交于w，因w_1，$w_3\in A\cap C$，且$A\cap C$為凸集合，所以$\overline{w_1w_3}\subset A\cap C$，故$w\in A\cap C$，同理亦可推出$w\in B\cap D$

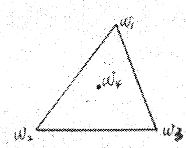
$\therefore\ w\in A\cap B\cap C\cap D$，因此$A\cap B\cap C\cap D$ 不空。

情況2，w_1，w_2，w_3，w_4中，有三點形成三角形的三個頂點，而另一點在三角形內；如圖五，因w_1，w_2，$w_3\in A$，且A為凸集合，

所以，$w_4\in A$

而，已知$w_4\in B\cap C\cap D$

$\therefore\ w_4\in A\cap B\cap C\cap D$；因此$A\cap B\cap C\cap D$不空



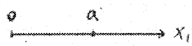
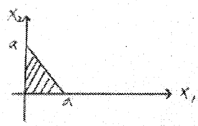
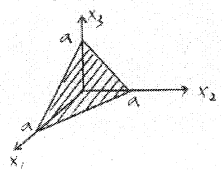
圖五

練習：

(1)試將上面的結果推廣至3度空間，並予證明。（註6）

(2)上面的定理，在1度空間內的類似結果是怎樣的？

例：$S=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0,\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant a\}$，要求$S$之測度。我們先觀察$n=1$，2，3的情形。

n	S之圖形	S之測度
1		長度：a
2		面積：$\frac{1}{2}a^2$
3		體積：$\frac{1}{6}a^3$

從上表，我們似可類推 n 度空間內 S 之測度爲 $\frac{1}{n!}a^n$ 。事實上我們可用重積分來證實。

$$S\text{之測度} = \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}} dx_{n-2} \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n$$

$$= \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}} dx_{n-2} \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} a-x_1-\cdots-x_{n-1}\, dx_{n-1}$$

$$= \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}} \frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2\, dx_{n-2}$$

$$= \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdots \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(a-x_1-\cdots-x_{n-3})^3\, dx_{n-3}$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \int_0^a \frac{1}{(n-1)!}(a-x_1)^{n-1}\, dx_1$$

$$= \frac{1}{n!}a^n$$

注意：

$$\int_0^b (b-y)^k dy = \frac{1}{k+1} b^{k+1}$$

$k = 0, 1, 2, \cdots$

練習：$S = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant r^2\}$；$S$ 在 $n = 1, 2, 3$ 之情形如下

n	S	S之測度	S之邊界（∂S）	∂S 之測度
1	區間：$[-r, r]$	長度：$2r$	二點	
2	半徑爲 r 之圓	面積：πr^2	圓周	周長：$2\pi r$
3	半徑爲 r 之球	體積：$\frac{4}{3}\pi r^3$	球面	表面積：$4\pi r^2$

求證：n 度空間之 S 的測度爲 $\begin{cases} \frac{1}{k!}\pi^k \cdot r^n, & n = 2k \\ \frac{2^{k+1}}{1\cdot 3\cdots 2k+1}\pi^k r^n, & n = 2k+1 \end{cases}$

並推測 ∂S 之測度。（註 7）

八、數學歸納法

當要證" $P(n)$ 成立，$\forall n \in N$ "這種型式的定理，我們有可能用數學歸納法來證明，（當

然並非一定有效）。

練習：（配對問題），有一群男士與一群女士，他們之間有些是已經彼此認識的，現在每一男士要挑一位他已認識之女士，不同的男士必須挑不同的女士；是否所有的男士都能挑到合乎規定的女士？設這群男士所組成的集合為M，女士所形成的集合為W；U為M之任意部份集合時，令$A(U)=\{y\in W \mid y$ 與U中之某一男士認識$\}$。 試證：若"$\#A(U)\geqslant \#U$，$\forall U$，$U\subset M$"（$\#B$表示B集合之元素個數），則M中每一男士都能挑到合乎規定之女士。（附8）

九、觀察、經驗與直覺

使數學茁壯，長大的是"問題"，而觀察與猜測，又是發掘問題之最佳途徑。

例：我們知道：$(1+2+3+\cdots+n)^2=1^3+2^3+\cdots+n^3$。所以，就想到如下的題目：找出能滿足，$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3, \forall n,$ 的（所有）正數數列$\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$。

解：我們用數學歸納法來證明$a_n=n$，$\forall n=1,2,\cdots$

從$a_1^2=a_1^3$；得$a_1=1$（$\because$ $a_1>0$）

設$a_1=1$，$a_2=2$，$\cdots$，$a_n=n$，

從$(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})^2=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3+a_{n+1}^3$

得$(1+2+\cdots+n+a_{n+1})^2=1^3+2^3+\cdots+n^3+a_{n+1}^3$

所以 $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}+a_{n+1}\right)^2=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2+a_{n+1}^3$

經整理得 $a_{n+1}(a_{n+1}+n)(a_{n+1}-(n+1))=0$

$\therefore$ $a_{n+1}=n+1$ （$\because$ $a_{n+1}>0$）

所以滿足條件的數列只有$\{1,2,3,\cdots,n,n+1,\cdots\}$

練習：找出能滿足$(1^p+2^p+\cdots+n^p)^q=1^r+2^r+\cdots+n^r$，$\forall n$的所有自然數$p$，$q$，$r$。（註9）

練習：下象棋時，馬走日，象走田，你一定發現；馬任何地方都可到達，而象有很多地方無法走到（即使在自己的境內）；你可發現差別在那裏？做做下面的題目：

p，q為兩正整數，在一可向四方無限延伸的象棋盤，一棋子的走法是走$p\times q$步（即每一步的走法，是從一個邊長分別為p，q之矩形的一頂點到對角的頂點；馬即為1×2步，象為2×2步）。問p，q應滿足怎樣的條件，走$p\times q$步的棋子才能從棋盤的某一位置走到其他任何位置。（附10）

我們從一些現象，可做直覺的推測；之後，就得發揮想像力、思考力及推理能力去證明。如果，最後做出的結果與直覺相符，是很令人欣慰的；如果，最後整理出來的結果與自己最初的直覺還有一般人的直覺都不相符，就更值得慶賀。當初，Bolzano 及 Weierstrass 分別造出每一點都連續而每一點都不可微分的函數，這結果確實使其他數學家有大出意外之感。

練習：一平面上凸集合A與一直線L，集合A在直線L之垂直投影的長度，稱為A在L方向的寬度；若一集合在任何方向的寬度都是固定的常數，則稱此集合為常寬圖形；例如：圓為長寬圖形，而三角形,四邊形皆非常寬圖形。問：平面上除圓以外，還有沒有其他常寬凸集合？（註11）

上面所列乃學習數學常用的基本訓練，然則，多做題目是增進數學能力之唯一途徑，國內的數學傳播及美國數學月刊都提供相當豐富的題目，值得去看、去解。

註釋：

註 1："f在$[a,b]$上幾乎處處為0"的意思是說：

有一集合$A\subset[a, b]$，而A之長度為$b-a$，使得

$f(x)=0$，$\forall x\in A$　（參考Marsden, Elementary classical analysis P283）

註2：③f在$[a, b]$上至少有一點連續，（參考Goffman, real functions P109）

註3：不成立；

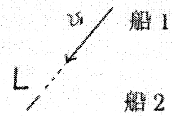
將實數集R視為佈于有理數集Q之向量空間。

令$B=\{X_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$為$R$之一基底，且$1\in B$

設$f: R\to R$，

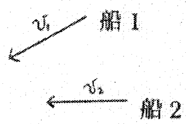
令$f(\alpha_0\cdot 1+\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)=\alpha_0$，若$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\in Q$，且$x_1, x_2, \cdots, x_n\in B-\{1\}$；$f$即為一反例。

註4：①

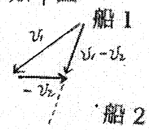


設L為船1之前進路線，船2與L之垂直距離，即為所求。

②



以相對運動來看，我們可視船2為靜止，而船1以V_1-V_2前進，則回到①之情形；如下圖



註5：①$\frac{1}{2}(2b^2+2c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$，$\left(bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}$

②$\left(\frac{m^2s+[(b^2m+c^2n)\cdot a^{-1}-mn]\cdot r}{c}-r\cdot s\right)^{\frac{1}{2}}$

註6：在3度空間內之五個凸集合，若任四個交集都不是空集合，則此五個集合之交集也不是空集合。

註7：參考Marsden, Elementary Classical Analysis P324。

註8：參考Authur Gill, Appied Algebra for the computer science P384。

註9：$p=1$，$q=2$，$r=3$

或$q=1$，$p=r$（參考數學傳播3, P125）

註10：p，q必須互質，且其中有一個是偶數。

註11：還有其他的等寬凸集合；如下圖，A，B，C為邊長為1的正三角形之頂點，分別以A，B，C為圓心，1為半徑，畫出圓弧$\widehat{BC}$、$\widehat{AC}$、及$\widehat{AB}$；則此三弧圍成之區域為一等寬凸集合，但它並非一個圓。